



# Hauptseminar Weiche Materie

## *Die Boltzmann-Gleichung*

Falb, Jürgen

Universität Stuttgart



# Probleme der klass. Mechanik

## Vielteilchensysteme

werden durch gekoppelte Differentialgleichungen, für einen makroskopischen Körper  $\approx 10^{23}$ , daraus ergeben sich praktische Probleme:

- **Differentialgleichungen:**

Für Spezialfälle eventuell noch allgemein lösbar.

- **Anfangswertproblematik:**

$10^{23}$  vorgegebene Werte einsetzen  $\Leftrightarrow$  Strafarbeit



# Probleme der klass. Mechanik

## Vielteilchensysteme

können aufgrund der grossen Zahl an beteiligten Teilchen, mit Hilfe eines statistischen Zugangs behandelt werden. Wesentliche Annahme hierfür ist:

### ■ Ergodenhypothese:

- Ein betrachtetes Untersystem befindet sich während eines hinreichend grossen Zeitintervalls, hinreichend oft in allen seinen möglichen Zuständen.
- Ursache sind die komplizierten Wechselwirkungen mit den anderen Teilen des Gesamtsystems

# Statistische Beschreibung

## Vielteilchensysteme

Beschreibung im Phasenraum ermöglicht die Einführung der Verteilungsfunktion:

### ■ Phasenraumvolumen:

Für ein kleines Volumen  $\Delta p \cdot \Delta q$  wird die Trajektorie des Systems betrachtet.

### ■ Wahrscheinlichkeit:

■ Während der Gesamtbeobachtungszeit  $T$  befindet sich das System in dem Phasenraumvolumen  $\Delta p \cdot \Delta q$ .

■ Definition für die Wahrscheinlichkeit:  $w = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta t}{T}$

### ■ Verteilungsfunktion:

Infinitesimale Betrachtung:  $dw = f(p, q) dp dq$

# Statistische Beschreibung

## Verteilungsfunktion

Eigenschaften der Verteilungsfunktion:

- **explizite Zeitabhängigkeit:**

$f(p, q) \rightarrow f(p, q, t)$  beschreibt ein System, welches nicht im Gleichgewicht ist.

- **Normierung:**

$$\int dw = \int f(p, q) \cdot dpdq = 1$$

- **Mittelwertbildung:**

beliebige Funktion  $\bar{\rho} = \int \rho(p, q) \cdot f(p, q) \cdot dpdq$

- **Vertauschung von Zeit- und Ensemblemittelung:**

$$\int \rho(p, q) \cdot f(p, q) \cdot dpdq = \frac{1}{T} \int_0^T \rho(t) dt$$

# Statistische Beschreibung

## Liouville-Theorem

Betrachtet man die Punkte des Phasenraums, eines abgeschlossenen Systems, als stationäre Strömung einer idealen Flüssigkeit, so findet man folgende:

- **Gleichung:**

$$\frac{df}{dt} = 0$$

- **Interpretation:**

Entlang einer Phasenraumtrajektorie ist die Verteilungsfunktion konstant.

- **Weiterführung zur Thermodynamik:**

Von hier ausgehend, kann man zu Gleichgewichtsprozessen übergehen. Die Entropie und statistischen Ensembles definieren.

# Statistische Beschreibung

## Variablenabhängigkeit der Verteilungsfunktion

Um die Notation allgemein zu halten, werden die Variablen umbenannt, zu  $f(t, r, \Gamma)$

### ■ Die Grösse $\Gamma$ :

Enthält alle Variablen ausser den Schwerpunktskoordinaten und der Zeit, z.B.:

1-atomiges Molekül:  $d\Gamma = d^3p$

mehratomiges Molekül:  $d\Gamma = 2\pi d^3p M dM d\sigma_M$

### ■ Mittelung:

Schreibt sich dann, z.B. im Fall der Teilchenzahldichte:

$$\int f(t, r, \Gamma) d\Gamma = N(r, t)$$

# Boltzmann-Gleichung

## Stossterm

Dieser muss eingeführt werden, da die Konstanz der Phasenraumtrajektorie im Falle eines Stosses nicht mehr gewährleistet ist, und somit ein Störterm im Liouville-Theorem eingebaut werden muss.

### ■ Erweiterung für einen Stoss:

$$\frac{df}{dt} = 0 \rightarrow \frac{df}{dt} = \text{St}[f]$$
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \underline{v} \nabla f = \text{St}[f]$$

### ■ Anschauliche Interpretation eines Stosses:

Betrachtet man ein Molekül, das einem Stossprozess unterliegt, so verändert sich die Phasenraumbahn im Falle eines Stosses -instantan- es gibt also Sprünge im Phasenraum. Das Molekül wird von einem infinitesimalen Phasenraumvolumen  $d\Gamma \rightarrow d\Gamma'$  gestreut.

# Boltzmann-Gleichung

## Formulierung des Stossterms

Allgemein betrachtet, kann der Stoss zwischen 2 Molekülen als eine Übergangswahrscheinlichkeit, der Grössen  $\Gamma$  aufgefasst werden:

### ■ Abhängigkeiten für die Gesamtzahl der Stösse:

- Vor dem Stoss sollen die Moleküle die Werte  $\Gamma_1, \Gamma_2$  haben, die im Intervall  $d\Gamma_1, d\Gamma_2$  liegen.
- Als Ergebniss des Stosses werden entsprechend andere Werte angenommen:  $\Gamma'_i, d\Gamma'_i$
- Wahrscheinlichkeit eines Stosses hängt direkt von der Anzahl der Moleküle im betrachteten Intervall ab, also von  $f(t, r, \Gamma) d\Gamma$
- von den Intervallen nach dem Stoss

### ■ Gesamtzahl für einen Stoss $\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma'_1, \Gamma'_2$ :

$$w(\Gamma'_1, \Gamma'_2 | \Gamma_1, \Gamma_2) f(t, r, \Gamma_1) f(t, r, \Gamma_2) d\Gamma_1 d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2$$

# Boltzmann-Gleichung

## Symmetrie bezüglich Zeitumkehr

Betrachtet man im Gleichgewicht eine Zeitumkehrung, so ergibt sich, dass die Zustände vor und nach dem Stoss gerade vertauscht werden.

### ■ Verteilungsfunktion im Gleichgewichtsfall:

$f(\Gamma) = c_0 \cdot e^{-\frac{\epsilon(\Gamma)}{T}}$ , wichtig ist, dass sich die Energie bei Zeitumkehr nicht ändert, es also gilt:  $\epsilon(\Gamma) = \epsilon(\Gamma_1^T)$

### ■ Übergangswahrscheinlichkeit verändert sich zu:

$$w(\Gamma'_1, \Gamma'_2 | \Gamma_1, \Gamma_2) f_1 f_2 d\Gamma_1 d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2 = \\ w(\Gamma_1^T, \Gamma_2^T | \Gamma_1^{T'}, \Gamma_2^{T'}) f'_1 f'_2 d\Gamma_1 d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2$$

### ■ Energieerhaltungssatz liefert:

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon'_1 + \epsilon'_2, \text{ also folgt die Identität: } f_1 f_2 = f'_1 f'_2$$

# Boltzmann-Gleichung

## Symmetrie bezüglich zusätzlicher Inversion

Durch die Zeitumkehrung wird die Reihenfolge in der Übergangswahrscheinlichkeitsfunktion verändert. Nun führt man eine Inversion durch:

### ■ Inversion:

Die Inversion ändert die Vorzeichen polarer Vektoren, lässt die von axialen Vektoren unverändert:  $\Gamma^{\text{II}} = (-\underline{p}, -\underline{M})^{\text{I}} = (\underline{p}, -\underline{M})$

### ■ Übergangswahrscheinlichkeit verändert sich zu:

$w(\Gamma'_1, \Gamma'_2 | \Gamma_1, \Gamma_2) = w(\Gamma_1^{\text{II}}, \Gamma_2^{\text{II}} | \Gamma_1^{\text{II}'}, \Gamma_2^{\text{II}'})$  oder für ein 1-atomiges Gas:

$w(\underline{p}'_1, \underline{p}'_2 | \underline{p}_1, \underline{p}_2) = w(\underline{p}_1, \underline{p}_2 | \underline{p}'_1, \underline{p}'_2)$

### ■ detailliertes Gleichgewicht:

Jeder mikroskopische Stossprozess wird durch den zu ihm Inversen ausgeglichen. (1-atomiges Gas)

# Boltzmann-Gleichung

## Ableitung des Stossterms

Durch einen Stoss werden sowohl Verlust- als auch Gewinnraten für ein Intervall eingeführt:

### ■ Verlustrate:

Der Übergang  $\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Gamma'_1, \Gamma'_2$  führt das Molekül mit dem Wert  $\Gamma_1$  aus seinem Intervall  $d\Gamma_1$  hinaus in das Intervall  $d\Gamma'_1$ . Somit gilt für ein festes  $\Gamma_1$  sind alle möglichen Stöße:

$$\int d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2 w(\Gamma'_1, \Gamma'_2 | \Gamma_1, \Gamma_2) f_1 f_2$$

### ■ Gewinnrate:

Diesselben Überlegungen führen zu einer Gewinnrate:

$$\int d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2 w(\Gamma_1, \Gamma_2 | \Gamma'_1, \Gamma'_2) f'_1 f'_2$$

### ■ effektiver Term:

$$\text{Gewinn-Verlust: } St[f] = \int d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2 \cdot w(\Gamma_1, \Gamma_2 | \Gamma'_1, \Gamma'_2) \cdot (f_1 f_2 - f'_1 f'_2)$$

# Boltzmann-Gleichung

## Vereinfachung des Stossterms

Betrachtet man den Stossterm nur qualitativ, so kann man ihn sehr vereinfachen:

### ■ Mittlere freie Weglänge:

In der durchlaufenen Strecke  $s$  sind gerade  $N\sigma s$  mögliche Stöße für das Molekül eingetreten.

mittlere freie Weglänge:  $l = \frac{s}{\#Stöße} = \frac{1}{N\sigma}$

### ■ Stossterm:

$$St[f] = -\frac{f-f_0}{\tau} = \frac{\langle v \rangle}{l} \underbrace{(f - f_0)}_{\text{Im GG: } St[f] = 0},$$

Im GG:  $St[f] = 0$

die mittlere freie Flugzeit  $\tau$  entspricht also einer Relaxationszeit.

# Hydrodynamik

## Vorraussetzungen

Wir werden hier Näherungen betrachten, die zu den Gleichungen für eine ideale Flüssigkeiten führen:

### ■ Näherungen:

- Die makroskopischen Grössen sollen sich hinreichend langsam mit dem Ort verändern, also auf grösseren Skalen stattfinden als die mittlere freie Weglänge.
- Zusätzlich soll in den entsprechenden kleinen Teilvolumina ein Gleichgewicht herrschen.

### ■ Erhaltungssätze:

- Energieerhaltungssatz:  $\epsilon_1 + \epsilon_2 = \epsilon'_1 + \epsilon'_2$
- Impulserhaltungssatz:  $\underline{p}_1 + \underline{p}_2 = \underline{p}'_1 + \underline{p}'_2$
- Teilchenzahlerhaltung:  $\int \text{St}[f] d\Gamma_1 = 0$

# Hydrodynamik

## Erhaltungssätze

Führen zum Verschwinden bestimmter Integrale:

### ■ allgemein Funktion $\phi(\Gamma)$ :

$$\begin{aligned}\int \phi(\Gamma_1) d\Gamma_1 &= \int \phi(\Gamma_1) \omega(\Gamma'_1, \Gamma'_2 | \Gamma_1, \Gamma_2) (f'_1 f'_2 - f_1 f_2) d^4\Gamma \\ &= \int (\phi_1 - \phi'_1) \omega(\Gamma_1, \Gamma_2 | \Gamma'_1, \Gamma'_2) f'_1 f'_2 d^4\Gamma \\ &= \frac{1}{2} \int (\phi_1 + \phi_2 - \phi'_1 - \phi'_2) \omega' f'_1 f'_2 d^4\Gamma\end{aligned}$$

### ■ Verschwindende Integrale:

- $\int \text{St}[f] d\Gamma_1 = 0$
- $\int \underline{\epsilon} \cdot \text{St}[f] d\Gamma_1 = 0$
- $\int \underline{p} \cdot \text{St}[f] d\Gamma_1 = 0$

# Hydrodynamik

## Hydrodynamische Gleichungen

Ausgehend von der Boltzmann-Gleichung  $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (v_\alpha f) = \text{St}[f]$ , folgen durch Multiplikation mit der entsprechenden Grösse und anschliessender Integration, die hydrodynamischen Gleichungen:

- **Kontinuitätsgleichung (Masse):**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{V}) = 0 \text{ wobei } \rho = \frac{1}{N} \int m f d\Gamma_1 \text{ und } \underline{V} = \frac{1}{N} \int \underline{v} f d\Gamma_1$$

- **Kontinuitätsgleichung (Impuls):**

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V_\alpha) + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \text{ wobei } \Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f d\Gamma_1$$

- **Kontinuitätsgleichung (Energie):**

$$\frac{\partial}{\partial t} (N \bar{\epsilon}) + \text{div}(\underline{q}) = 0 \text{ wobei } \underline{q} = \int \epsilon \underline{v} f d\Gamma_1$$

# Hydrodynamik

## Komponenten der Kontinuitätsgleichungen

Um den Grenzfall einer makroskopischen Theorie zu erhalten, müssen nun die entsprechenden Komponenten auf makroskopische Größen zurückgeführt werden:

### ■ Annahmen für alle Komponenten:

- In jedem Volumenelement wird ein lokales Gleichgewicht angenommen. Hierdurch werden die entsprechenden Größen aus der Boltzmannverteilung ( $f_0$ ) definiert.
- Das Volumenelement bewege sich mit der Geschwindigkeit  $\underline{V}$ . Also unterscheidet sich die Gleichgewichtsverteilung nur durch eine Galileo-Trafo.
- In System K gilt also  $\underline{v} = \underline{v}' + \underline{V}$

# Hydrodynamik

## Komponenten der Kontinuitätsgleichungen

Speziell für den Tensor der Impulsstromdichte und den Energiestrom:

### ■ Tensor der Impulsstromdichte:

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha\beta} &= \int m v_{\alpha} v_{\beta} f d\Gamma_1 = mN \langle v_{\alpha} v_{\beta} \rangle \\ &= mN \langle (v'_{\alpha} + V_{\alpha})(v'_{\beta} + V_{\beta}) \rangle = mN(V_{\alpha} V_{\beta} + \langle v'_{\alpha} v'_{\beta} \rangle)\end{aligned}$$

$$\text{mit } \langle v'_{\alpha} v'_{\beta} \rangle = \frac{1}{3} \langle v'^2 \rangle \delta_{\alpha\beta}$$

$$\text{folgt dann insgesamt: } \Pi_{\alpha\beta} = \rho V_{\alpha} V_{\beta} + P \delta_{\alpha\beta}$$

### ■ Energiestrom:

$$\underline{q} = \int \epsilon \underline{v} f d\Gamma_1 = N \underline{V} \left( \frac{m}{2} V^2 + \frac{m}{3} \langle v'^2 \rangle + \langle \epsilon' \rangle \right) =$$

$$\underline{V} \left( \frac{\rho}{2} V^2 + P + \underbrace{N \langle \epsilon' \rangle}_{\text{innere Energie}} \right) = \underline{V} \left( \frac{\rho}{2} V^2 + H \right)$$

innere Energie

Enthalpie

# dissipative Prozesse

## Wärmeleitung, Viskosität ...

Um am Beispiel der Wärmeleitung die Wärmeleitfähigkeit abzuleiten, wird zuerst eine allgemeine Relation abgeleitet, die einer 1. Ordnung Störungstheorie entspricht:

### ■ **Vorraussetzungen:**

Annahme des lokalen Gleichgewichts wird fallengelassen; stattdessen werden kleine Auslenkungen ( $\delta f \ll f_0$ ) aus dem lokalen Gleichgewicht betrachtet.

$$f = f_0 + \delta f, \text{ mit } \delta f = -\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \chi(\Gamma_1) = \frac{1}{T} f_0 \chi$$

### ■ **Funktion $\chi$ :**

$\chi$  muss die Boltzmann-Gleichung erfüllen, aber zusätzlich ergeben sich noch weitere Relationen:

$$\int (f_0 + \delta f) \epsilon d\Gamma_1 = \int f_0 \epsilon d\Gamma_1 + \int \delta f \epsilon d\Gamma_1 = \langle \epsilon \rangle + \delta \epsilon := \langle \epsilon \rangle$$

# dissipative Prozesse

## allgemeine Gleichung

Betrachtung in 1. Ordnung liefert (Zutaten):

- Explizit folgt für  $\chi$ :

$$\int f_0 \chi d\Gamma_1 = 0, \int f_0 \chi \epsilon d\Gamma_1 = 0, \int f_0 \chi \underline{p} d\Gamma_1 = 0$$

- Ansatz im Stossterm:

Eingesetzt und in 1. Ordnung betrachtet ergibt:

$$\text{St}[f] = \frac{f_0(\Gamma_1)}{T} \underbrace{\int w' f_0(\Gamma_2) (\chi'_1 + \chi'_2 - \chi_1 - \chi_2) d\Gamma_2 d\Gamma'_1 d\Gamma'_2}_{I(\chi)}$$

- Boltzmann-Gleichung für ein bewegtes Gas:

$$f_0(\Gamma_1) = \exp\left(\frac{\mu - \epsilon_{\text{innere}}}{T}\right) \exp\left(-\frac{m(\underline{v} - \underline{V})^2}{2T}\right)$$

- Thermodynamische und hydrodynamische Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \frac{\partial \mu}{\partial T} \Big|_P = -s, \quad \frac{\partial \mu}{\partial P} \Big|_T = \frac{1}{N} \text{ etc.}$$

# dissipative Prozesse

## allgemeine Gleichung

Man erhält also nach Durchführung der Ableitungen der linken Seite, und durch Elimination der Zeitableitungen durch die Eulergleichung die umgeformte Boltzmann-Gleichung:

$$\frac{\epsilon(\Gamma_1) - c_p T}{T} \underline{v} \nabla T + \frac{1}{2} [m v_\alpha v_\beta - \frac{\epsilon(\Gamma_1)}{c_v} \delta_{\alpha\beta}] [\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}] = I(\chi)$$

### ■ Wärmeleitfähigkeit:

$$\frac{\epsilon(\Gamma_1) - c_p T}{T} \underline{v} \nabla T = I(\chi)$$

### ■ Viskosität:

$$\frac{1}{2} [m v_\alpha v_\beta - \frac{\epsilon(\Gamma_1)}{c_v} \delta_{\alpha\beta}] [\frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial v_\beta}{\partial x_\alpha}] = I(\chi)$$

# dissipative Prozesse

## Wärmeleitfähigkeit

Für die Wärmeleitfähigkeit wird in die vorhergehende Gleichung der Ansatz  $\underline{\chi} = \underline{g}(\Gamma_1) \nabla T$  eingesetzt:

- **Koeffizientenvergleich liefert:**

$$\underline{v} \frac{\epsilon(\Gamma_1) - c_p T}{T} = I(\underline{g}) \text{ die Bestimmungsgleichung für } \underline{g}$$

- **Wärmeleitfähigkeit:**

Aus der Gleichung für den Energiestrom folgt nun:

$$\underline{q} = \int \epsilon \underline{v} (f_0 + \frac{1}{T} \underline{g} \nabla T) d\Gamma_1$$

ohne Konvektion folgt:  $q_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial T}{\partial x_\beta}$ , mit  $\kappa_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \int f_0 \epsilon v_\alpha g_\beta d\Gamma_1$

Die Isotropie eines Gases im Gleichgewicht fordert, dass  $\kappa$  eine skalare Grösse wird:  $\kappa = -\frac{1}{3T} \int f_0 \underline{v} \underline{g} d\Gamma_1$

# dissipative Prozesse

## Wärmeleitfähigkeit

Vereinfacht man nun die entsprechenden Terme mit Hilfe der mittleren freien Weglänge und dem Wirkungsquerschnitt, so folgt:

### ■ Bestimmung von $\underline{g}$ :

$$\frac{St[f]}{\nabla T} = \frac{f_0}{T} I(\underline{g}) \approx -\frac{\langle v \rangle}{l} (f_0 + \frac{f_0}{T} \underline{g} - f_0) \approx \langle v \rangle \frac{T - c_p T}{T} \frac{f_0}{T},$$

also gilt:  $g \approx l$

### ■ In die Wärmeleitfähigkeit eingesetzt:

$$\kappa = \frac{1}{3T} \int f_0 \underline{v} \underline{g} d\Gamma_1 \approx N \langle v \rangle l \approx \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

$$\text{mit } l \approx \frac{1}{N\sigma}, \quad \langle v \rangle \approx \sqrt{\frac{T}{m}}$$

Innerhalb dieser Abschätzung ist  $\sigma$  von der mittleren thermischen Geschwindigkeit abhängig, also von der Temperatur.

# Diffusion

## Fokker-Planck-Gleichung

Betrachtet man eine andere Art der Näherung, nämlich langsame Prozesse, also dass die Relaxationszeit sehr gross im Vergleich zur Zeitdauer eines Elementaraktes ist, so kann man vor allem die Übergangswahrscheinlichkeit vereinfachen:

### ■ typisches Beispiel - Impulsrelaxation:

- geringe Beimischung eines schweren Gases in einem leichten.
- keine Stösse der schweren Teilchen untereinander.
- Verbleibende Stösse verursachen nur kleine Änderungen des Impulses der schweren Teilchen.
- $w(\underline{p}, \underline{q}) d^3 p$  beschreibt die Wahrscheinlichkeit der Impulsänderung  $\underline{p} \rightarrow \underline{p} - \underline{q}$  eines schweren Teilchens bei einem Elementarakt.

# Diffusion

## Fokker-Planck-Gleichung

Somit folgt die Boltzmann-Gleichung für eine Verteilungsfunktion  $f(t, \underline{p})$ :

$$\frac{\partial f(t, \underline{p})}{\partial t} = \int \underbrace{[w(\underline{p} + \underline{q}, \underline{q})f(t, \underline{p} + \underline{q})]}_{\text{Gewinn}} - \underbrace{w(\underline{p}, \underline{q})f(t, \underline{p})}_{\text{Verlust}} d^3 q$$

### ■ Entwicklung des Integranden:

Da Übergänge mit grossem  $\underline{q}$  sehr unwahrscheinlich sind, ist es möglich den Gewinn-Term zu entwickeln.

$$w(\underline{p} + \underline{q}, \underline{q})f(t, \underline{p} + \underline{q}) \approx$$

$$w(\underline{p}, \underline{q})f(t, \underline{p}) + \underline{q} \frac{\partial}{\partial \underline{p}} w(\underline{p}, \underline{q})f(t, \underline{p}) + \frac{1}{2} q_\alpha q_\beta \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} w(\underline{p}, \underline{q})f(t, \underline{p})$$

### ■ Fokker-Planck:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} [A_\alpha f + \frac{\partial}{\partial p_\beta} (B_{\alpha\beta} f)]$$

$$\text{mit } A_\alpha = \int q_\alpha w(\underline{p}, \underline{q}) d^3 q \text{ und } B_{\alpha\beta} = \int q_\alpha q_\beta w(\underline{p}, \underline{q}) d^3 q$$